TEORIA I PRAKTYKA W NAUCZANIU MATEMATYKI

Rozprawy Społeczne Nr 1 (V) 2011, s. 112-118

Ewa Jagiełło

Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

Streszczenie: We współczesnym świecie zwrócono uwagę na potrzebę uczenia się przedmiotów ścisłych, wśród których dominującą rolę odgrywa matematyka nazywana Królową Nauk. W niniejszym artykule poruszony zostaje problem nauczania matematyki w szkole, z wyraźnym uwzględnieniem metod nauczania. Zwróceniem uwagi na język matematyki, który nie jest tworem martwym, lecz żywym i dynamicznie się zmieniającym. Czytając teksty matematyczne napotykamy się nie tylko na symbole i znaki, są one wzbogacone o słowa. Podczas dyskursu wymianę poglądów ułatwiają metafory i metonimie, którym niejednokrotnie towarzyszą gesty i mimika. Wzbogacony język matematyki dodatkowymi formami komunikacji werbalnej i niewerbalnej jest przysłowiową „chińszczyzną" dla jego wielu odbiorców. Dlatego komunikacja pomiędzy nauczycielem a dzieckiem jest trudna. Matematyk występując w roli belfra ma dość trudne zadanie, przekazując niezbędną wiedzę do funkcjonowania we współczesnym świecie. Zadaniem każdego nauczyciela jest nauczyć dzieci posługiwania się tym abstrakcyjnym językiem, dobierając odpowiednie metody i formy pracy.
Zmierzając do osiągnięcia tego celu, nie wystarczy rozwiązać niezmiernie dużej ilości zadań, bez ich dokładnego rozumienia. Z doświadczeń wielu pedagogów wynika, iż skuteczniej jest przyjąć tezę: najpierw zrozumieć i zobrazować problem, potem nadać mu sens, a na koniec poznać symbol.

Słowa kluczowe: nauczanie, przedmiotu ścisłe, matematyka, komunikacja nauczyciel-uczeń

Co to jest matematyka? Definicja ta kształtuje się od dawien dawna, zdaniem historyków, prawdopodobnie wzięła swój początek w Egipcie i Mezopotamii, przenikając potem do Grecji i Rzymu, następnie Islamu i na Zachód Europy. Biorąc pod uwagę wschodnie kraje, aktywność matematyczna rozpoczęła się dość intensywnie w Japonii i Chinach.

Termin matematyka wywodzi się z greckiego słowa *mathēmatike* z *máthēma,* oznaczającego nauka, umiejętność. Występuje w wielu słownikach i encyklopediach oraz innych pozycjach książkowych, poświeconych światu matematycznemu.

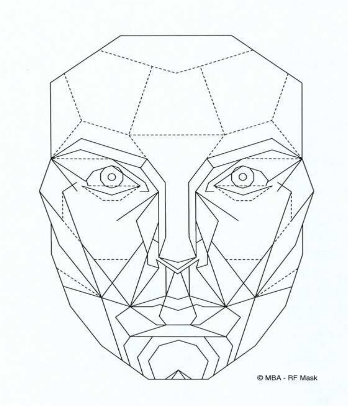
Według *Małego słownika języka polskiego* matematyka, to „nauka o liczbach i stosunkach przestrzennych" (Skorupka i in., 1968, s. 376). W *Encyklopedii PWN* czytamy: m**a**tematyka (gr. *mathēmatik* z *máthēma* – poznanie, umiejętność) – jedna z najstarszych dziedzin wiedzy ludzkiej, dawniej rozumiana jako nauka o liczbach i figurach geometrycznych: najistotniejszą cechą charakteryzującą m. jest to, że posługuje się w zasadzie metodą dedukcyjną. (Kaczorowski i in., 2009, s. 174)

Próbę określenia matematyki podejmowali przedstawiciele różnych dziedzin nauki:

- Paul Adrien Maurice Dirac (angielski fizyk teoretyk, 1902-1984) uważał, że „matematyka jest narzędziem stworzonym specjalnie do wszelkich abstrakcyjnych koncepcji, i nie ma ograniczeń dla jej potęgi w tym zakresie" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- Benjamin Peirce (amerykański matematyk, 1809-1880) stwierdził, iż „matematyka jest nauką, która wyciąga właściwe wnioski" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- Henri Poincaré (francuski matematyk, fizyk, astronom i filozof nauki, 1854-1912) –matematyka to sztuka „nadawania takich samych nazw różnym rzeczom" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- zdaniem Davida Hilberta (matematyk niemiecki, 1862-1943) - sztuka „uprawiania matematyki zawiera się w znajdowaniu szczególnych przypadków, które zawierają w sobie zalążki uogólnień" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- William Wodsworth (angielski poeta, 1770-1850) poetycko napisał: „matematyka jest niezależnym światem stworzonym przez czystą inteligencję" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- Imanuel Kant (filozof niemiecki, 1724-1804) - „matematyka jest najjaskrawszym przykładem, jak czysty rozum może skutecznie rozszerzać swoją domenę bez jakiejkolwiek pomocy doświadczenia" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- Philip J. Davis i Reuben Hersh - „*matematyka jest nauką o liczbach i przestrzeni*. Trochę ją rozszerzając można by dodać, że matematyka traktuje także o symbolizmie odnoszącym się do liczby i do przestrzeni" (Davis, Hersh, 1994, s. 17).
- natomiast dla małego dziecka matematyka to przede wszystkim liczby, rachunki i figury geometryczne.

Odchodząc od analizy poezji i literatury, wgłębiając się w rzeczywistość szkolną, najczęściej spotkamy się ze stwierdzeniem - matematyka jest „koszmarem". Nie radzą sobie z nią młodsi i starsi. „Jakże często dorośli wykształceni ludzie wspominają w środkach masowego przekazu o swoich kłopotach z matematyką – na ogół zachowując się tak, jakby jej nieznajomość była czymś cennym, właściwym i nobilitującym. Czy to rzeczywista duma, czy może tylko reakcja obronna? A jeśli duma, to z czego? Przy okazji nasuwa się jeszcze jedno pytanie: dlaczego japońska łamigłówka *sudoku* stała się tak popularna w naszym kraju pełnym humanistów? Przecież wymaga ona metod postępowania i wnioskowania typowych właśnie dla matematyki. Czy dlatego, że nie kojarzy nam się ze szkołą?" (Dąbrowski, 2008, s. 141). W XXI wieku widząc nieodpartą potrzebę uczenia się matematyki, rozpoczęto wszelkiego rodzaju kampanie obalające mit, że matematyka to trudny przedmiot i nieprzydatny do życia. A to przecież człowiek stworzył owo narzędzie na potrzeby życia codziennego, chociażby przy działalności handlowej, ustalaniu cen, biciu monet, udzielaniu pożyczek, zaciąganiu długów, hazardzie (teoria prawdopodobieństwa). Napoleon bardzo chętnie podczas toczonych wojen otaczał się świtą w skład, której wchodzili matematycy i sam uwielbiał matematykę. „Napoleon uważał matematyków za dostatecznie użytecznych towarzyszy, by mieć ich pod ręką" (Dąbrowski, 2008, s. 87). Patrząc na matematykę w tym kontekście, widzimy iż przygotowuje ona młodych członków społeczeństwa do stosowania i tworzenia modeli matematycznych przydatnych w różnych sytuacjach życiowych. Zasadne jest stwierdzenie, iż przygotowanie matematyczne jest przyczynkiem do rozwoju społeczeństwa w różnych gałęziach nauki. Matematyka znalazła zastosowanie w bankowości, ekonomii, architekturze i ubezpieczeniach. Metodami matematycznymi wspierane jest diagnozowanie i terapia medyczna. Matematyką posługują się psychologowie, geografowie i całe rzesze przyrodników i genetyków. Gdyby nie wzory matematyczne, trudno by było policzyć wysokość rat kredytu czy pożyczki, wyznaczyć podatek, zbudować dom czy most. W XX wieku istotną rolę odegrała matematyka w kosmetyce, a konkretnie w chirurgii plastycznej. Gdy chcemy poprawić wizerunek i usunąć mankamenty swojej urody korzystamy z figur geometrycznych, a konkretnie trójkątów równoramiennych. Wiadomo było już w starożytności, że piękno ludzkiego ciała bierze się z określonych proporcji poszczególnych jego elementów, odwoływano się do boskiej proporcji. Każda figura, której długości boków układają się w proporcjach 1 do 1,6, jest postrzegana jako szczególnie atrakcyjna. To tak zwany złoty (harmoniczny) podział. Zatem tajemnica naszej urody tkwi w geometrii euklidesowej, a dokładniej w złotej liczbie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$. Wykorzystując proporcję złotego podziału kanadyjscy naukowcy skonstruowali idealną maskę charakterystycznych rysów twarzy.

Rysunek 1



Źródło: http://www.beautyanalysis.com

„Twarz Shanii Twain, kanadyjskiej piosenkarki pop, to wzorzec piękna – zdecydowali specjaliści z Uniwersytetu w Toronto. Podobnie jak twarze aktorek Angeliny Jolie i Elizabeth Hurley. Naukowcy stwierdzili to na podstawie matematycznych obliczeń. Każdy z nas, posługując się prostą matematyką, może sprawdzić, czy ma twarz bliską ideału – przekonuje autor badań prof. Kang Lee. O pięknie decyduje nie tylko to, jak symetrycznie rozmieszczone są usta, oczy, nos lub uszy, ale także... przeciętność" (http://www.wprost.pl/ar/183960/Uroda-przecietnosci/?I=1407).

Sądzę, iż ten przykład mówiący o pięknie i urodzie doskonale uświadomił użyteczność wiedzy przekazywanej i zdobywanej na matematyce.

Istotną rolę w interakcjach nauczyciela z uczniem odgrywa język, którym się komunikują oraz zabiegi dydaktyczne wykorzystywane przez nauczyciela w toku prowadzenia zajęć.

Pod koniec poprzedniego stulecia zrodził się ruch „Matematyka jako język", którego przedstawiciele uważają, iż w tradycyjnej szkole jest zbyt sformalizowany i sztuczny na każdym etapie edukacji. Zbudowany z dużej ilości reguł, znaków i symboli tworzących wzory, o które można się potknąć i przewrócić. Dlatego początkującemu trudno jest go zrozumieć i pojąć dlaczego się go uczy, skoro nie może wykorzystać w swoich czynnościach dnia codziennego. Gdy małe dziecko uczy się słowa łyżka, but itp., to zna potrzebę ich zastosowania w rzeczywistości. Ma świadomość, że będzie prosił o łyżkę, żeby zjeść zupę. A po co uczy się w szkole terminu „ułamek zwykły", który sprawia jemu tak dużo problemów, przecież na co dzień nie spotykamy go zbyt często. Czy wiedza przekazana na ten temat pozostanie tylko w szkolnych zeszytach?

Matematyka, jak każdy żywy język zawiera wiele zwrotów, wyrazów, form i figur stylistycznych umożliwiających porozumiewanie się. W tym olbrzymim zbiorze odnajdujemy słowa, które nabierają w ustach matematyków innego znaczenia, niż w mowie potocznej, np. grupa, pierścień, teza itp. Ta nauka ma również swój żargon, którym fachowo posługują się użytkownicy, jest to nieformalnie używana terminologia np. jajo Kolumba, dokładnie jeden, istnieje, wtedy i tylko wtedy itp.

Gdy matematycy komunikują się językiem formalnym używają znaków matematycznych, np. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$. Komunikując się nieformalnie, używają języka naturalnego, w którym spotykamy figury stylu m.in. metafory, metonimie i idiomy.

Metafora – przenośne użycie wyrazu na oznaczenie czegoś, co jest tylko pod pewnym względem podobne do rzeczy czy zjawisk, które są normalnie obejmowane znaczeniem tego wyrazu, por. np. wyraz *mrowisko* w odniesieniu do ludzi. Metaforę można określić jako skrócone porównanie, gdyż u jej podstawy zawsze leży jakieś porównanie, por. np. wyraz *osioł* użyty w odniesieniu do jakiejś osoby: *Ten osioł znów nagadał głupstw.* Podstawą do tego użycia jest porównanie w rodzaju *On jest głupi jak osioł* lub w skrócie *On jest osioł*.

Podstawą do metaforycznego użycia wyrazu może być podobieństwo zewnętrzne (tj. podobieństwo kształtu), podobieństwo w sposobie zachowania czy działania, podobieństwo funkcji itp. W ostatnim wypadku powstaje rodzaj proporcji, por. np. użycie wyrazu szyjka na oznaczenie części flaszki (ta część flaszki do całej flaszki ma się tak jak szyja człowieka do całego człowieka).

Częstym typem m. jest użycie wyrazu o znaczeniu konkretnym na oznaczenie pojęć abstrakcyjnych, por. wyrażenie *palić się do pracy, płonąć żądzą* itp." (Polański, 1991, s. 199). Po raz pierwszy metafory użył Arystoteles, przedstawiając ją jako rodzaj analogii. Jest ona wskazaniem na podobieństwo relacji między zjawiskiem lub stwierdzeniem, że: Zjawisko A ma się do zjawiska B, jak zjawisko C do zjawiska D. W ujęciu matematycznym, możemy zinterpretować następująco: liczba 3 ma się do liczby 6, jak liczba 4 do liczby 8 itp.

Drugą figurą stylu jest metonimia. Kazimierz Polański określa metonimię jako „przenośne użycie wyrazu na oznaczenie czegoś, co pozostaje w stosunku styczności do rzeczy czy zjawisk, które są normalnie znaczeniem tego wyrazu obejmowane, por. *szkoła* w znaczeniu 'dzieci chodzące do danej szkoły' (np. *Dziś cała szkoła idzie do muzeum), deski* w znaczeniu 'narty', *Warszawa* w znaczeniu 'mieszkańcy Warszawy' (np. *Dziś cała Warszawa się bawi*). Punktem wyjścia dla użycia metonimicznego może być styczność różnego rodzaju: pomieszczenie – ludzie przebywający (pracujący, uczący się) w tym pomieszczeniu, materiał – wytwór (por. powyższy przykład *deski*), autor – dzieło (por. *Czytam teraz Mickiewicza* zam. *Czytam teraz dzieło Mickiewicza*), część – całość" (Polański, 1991, s. 199).

Metonimia jest właściwie namiastką metafory, zasadnicza różnica polega na tym, że ta pierwsza tworzona jest szybko, łatwo i spontanicznie, zaś druga – wymaga przemyśleń i zastanowienia.

Trzeci efekt językowy, o którym warto wspomnieć mówiąc o języku matematyki, to idiomy. Jak zdefiniować termin „idiom" na płaszczyźnie matematyki? Na to pytanie, podczas dyskursu z Profesorem Wacławem Zawadowskim, wielokrotnie szukaliśmy odpowiedzi. Ostatecznie ustaliliśmy, że „idiomy to zwykle już tylko ślady po takich autentycznych figurach. To takie figury, które się przyjęły i zostały zaakceptowanymi zwrotami w języku. Taką spetryfikowaną figurą stylu jest znak „=" w znaczeniu „proszę o wynik". To jest „spetryfikowana" metonimia. Występuje niemal na każdym kalkulatorze i w niezliczonych zeszytach szkolnych na całym świecie. Taki charakter ma też użycie liter zamiast liczb, np.: $a+b$. Piszemy litery ale myślimy o liczbach i wtedy oczywiście znak „+" ma sens, dla liter raczej nie ma sensu. Przesunięcie funkcji referencyjnej z liter na liczby jest istotne."

Wymienione przeze mnie figury stylu mają duże znaczenie dla konstruowania treści matematycznych przez uczniów. Dzieci dość często odkrywając pewne zależności, rozwiązania, badając zjawiska, nie potrafią wyrazić precyzyjnie. Wówczas zastępują je zwrotami, które kojarzą się im z danym zjawiskiem. Uprawiają wówczas metonimię. Słowom towarzyszą wówczas gesty wyrażające idee, których nie potrafią wyrazić słowami. Amerykańscy naukowcy przeprowadzając badania, dowiedli, że uczniowie którzy rozwiązując zadania wspomagali się gestykulując, wykazywali lepsze zrozumienie problemów i strategii prowadzących do wyniku.

Jak już wspomniałam we współczesnej szkole rozpowszechniony jest przekaz werbalny obfitujący w dużą ilość symboli. W literaturze przedmiotu mówi się o przekazywaniu wiedzy w sposób: najpierw definicja, wzór a potem, sens i ćwiczenie. Koncepcje tą określa się także terminem - nauczania mechanistycznego, kładącego nacisk „na wyuczenie reguł i algorytmów, na ćwiczenie umiejętności rozwiązywania zadań nawet bez ich dokładnego rozumienia" (Siwek, 1998, s. 10). Z wieloletnich doświadczeń i obserwacji, wnioskuję brak efektów pozytywnych takiej kolejności zdarzeń. Należy proponować rozwiązania alternatywne: najpierw sens, ćwiczenia a potem definicje, twierdzenia i abstrakcyjne symbole. Taka naturalną jest kolejność etapów komunikowania się dziecka poznającego coś nowego. Amerykański psycholog Jerome S. Bruner wyróżnił:

- ✓ pierwszy poziom - enaktywny – powiązany z ruchem, gestem i ćwiczeniami.

  Uważał, iż myślenie przede wszystkim opiera się na czynnościach motorycznych, nie wykorzystując zarówno wyobraźni, jak i słów. Dziecko bawiąc się zabawką, wykonuje ruchy i gesty. Wewnętrznie nie jest reprezentowany werbalnie, lecz poprzez czynności.

- ✓ drugi poziom – ikoniczny – wykonywanie rysunków, modeli.
  Dziecko może zaprezentować swoje otoczenie poprzez obrazy umysłowe, tj. wzrokowe, słuchowe, węchowe lub dotykowe.
- ✓ trzeci poziom – symboliczny – kodowanie za pomocą umownych znaków i dekodowanie.
  Dziecko staje się zdolne do reprezentowania, przekształcania oraz manipulowania światem za pomocą języka, a nieco później za pomocą innych systemów symbolicznych (liczby, nuty, znaki).

Zdaniem Jerome S. Brunera jesteśmy w stanie „wyróżnić trzy aspekty procesu rozpatrywania rozwiązań alternatywnych, przy czym każdy z nich wiąże się z kierowaniem procesami poszukiwania. W wielkim skrócie można je określić jako: aktywizację, podtrzymywanie tego stanu i ukierunkowanie procesu. Innymi słowy, rozpatrywanie różnych możliwości wymaga czegoś, co by tę działalność uruchomiło, czegoś co by zapewniło jej ciągłość, oraz czegoś, co by zapobiegało działaniu przypadkowemu i niesystematycznemu" (Bruner, 1974, s. 73).

Podsumowując myśli amerykańskiego psychologa na płaszczyźnie nauczania, można postawić tezę: najpierw uczeń powinien zrozumieć i zobrazować problem, potem nadać mu sens, a na koniec poznać symbol. Z kolei, w trakcie procesu dochodzenia do sensu, zadaniem nauczyciela jest wzbudzanie ciekawości, prowokowanie myślenia matematycznego poprzez pobudzanie odpowiednich procesów umysłowych. Dorota Klus-Stańska i Marzena Nowicka podkreślają, iż „w podejściu zorientowanym na proces matematyka jest rozumiana nie jako zbiór pojęć i twierdzeń, ale jako sposób myślenia, polegający na szukaniu nowych możliwości i relacji między danymi oraz zdolność i gotowość do wykorzystania takich strategii, jak: odnajdywanie podobieństw, działanie przybliżone, odkrywanie własności" (Klus-Stańska, 2005, s. 117).

Działania te powinny być podjęte od pierwszych lat życia dziecka, aby rozpoczynając naukę w szkole podstawowej mogło znaleźć się na najwyższym poziomie złożoności języka - symbolicznym, przechodząc swobodnie pomiędzy wyszczególnionymi typami reprezentacji. „(...) w edukacji matematycznej przedszkolaków najważniejsze są osobiste doświadczenia dziecka. Stanowią one budulec, z którego dziecko tworzy pojęcia i umiejętności. Jeżeli doświadczenia są specjalnie dobrane, przyczyniają się także do rozwoju myślenia i hartowania dziecięcej odporności. Wszystko zaczyna się od doświadczeń. W czasie ich przetwarzania dziecko musi mówić. Nazywanie przedmiotów oraz wykonywanie czynności sprzyja koncentracji uwagi i pomaga dziecku dostrzegać to, co ważne. Na swój sposób ma ono czuć sens tego, co robi. Dziecięce wypowiedzi są także cenną wskazówką dla dorosłego: na ich podstawie może on stwierdzić, czy dziecko rozumuje we właściwym kierunku i czy uczy się tego, co trzeba" (Gruszczyk-Kolczyńska, 2007, s.10).

Dziecko musi wiedzieć, że 7 oznacza siedem identycznych przedmiotów, np. siedem czerwonych guzików, siedem niebieskich kulek, siedem skarpetek, siedem wiewiórek itd. W przypadku gdy tego nie zrozumie, będzie mu trudno rozszyfrować zasady arytmetyki.

Nie wszyscy zdaja sobie sprawę, iż nauka języka matematyki na tym najniższym poziomie edukacji to sprawa poważna. Większość sądzi, iż dzieci w przedszkolu tylko się bawią, słuchają bajek, malują i liczą.

Zgodnie z nową Podstawą programową wychowania przedszkolnego dla przedszkoli, oddziałów przedszkolnych w szkołach podstawowych oraz innych form wychowania przedszkolnego, aby osiągnąć cele należy m.in. wspomagać rozwój intelektualny dzieci wraz z edukacją matematyczną. „Dziecko kończące przedszkole i rozpoczynające naukę w szkole podstawowej:

1) liczy obiekty i rozróżnia błędne liczenie od poprawnego;
2) wyznacza wynik dodawania i odejmowania, pomagając sobie liczeniem na palcach lub na innych zbiorach zastępczych;
3) ustala równoliczność dwóch zbiorów, a także posługuje się liczebnikami porządkowymi;
4) rozróżnia stronę lewa i prawą, określa kierunki i ustala położenie obiektów w stosunku do własnej osoby, a także w odniesieniu do innych obiektów;
5) wie na czym polega pomiar długości, i zna proste sposoby mierzenia: krokami, stopa za stopą;
6) zna stałe następstwa dni i nocy, pór roku, dni tygodnia, miesięcy w roku" (Dz. U. 2009, nr 4, poz. 17).

Aby osiągnąć taki poziom umiejętności dziecko musi nie tylko liczyć, ale wykonać masę obliczeń, wspomagając się konkretnymi przedmiotami (kasztany, guziki, ziarenka), szacować ilości, rozróżniać wielkości i kształty, kształtować wyobraźnię przestrzenną. Jak już zostało wspomniane wcześniej, absolwent przedszkola powinien umieć liczyć obiekty. Łatwiej i szybciej opanuje tą sztukę, gdy będzie liczył wszystko co go otacza: talerze, zabawki, łyżki, guziki, buty, czerwone samochody napotkane po drodze do przedszkola itp. Warto przy tym zwrócić uwagę na „pary", np. parę butów, rękawiczek, skarpetek i także je zliczać.

Manipulacja określonymi rekwizytami ułatwia rozwiązywanie zadań, gdyż dziecko może doświadczyć i przeżyć. W trakcie wykonywania tych czynności „mały człowiek" obserwuje zmiany, widzi ich sens oraz efekt końcowy, bądź może go przewidzieć. Proces ten powinien trwać nawet do 10 roku życia. „Edukacja matematyczna w przedszkolu to poznanie stosunków jakościowych i ilościowych oraz kształtowanie pojęć matematycznych" (Klim-Klimaszewska, 2010, s. 135).

Oprócz wymienionych czynności dziecko musi się uczyć mówić o swoich przeżyciach, doświadczeniach i obserwacjach. Od poziomu umiejętności liczenia na etapie przedszkolnym zależą w dużym stopniu sukcesy odnoszone przez uczniów w matematyce na dalszych poziomach edukacji.

Zdaniem wielu pedagogów liczba schematycznie rozwiązanych zadań nie decyduje o umiejętnościach matematycznych, gdyż matematyczne myślenie opiera się na: konkretyzacji, uogólnianiu, wysuwaniu hipotez, uzasadnianiu (Mason i in., 2005).

Jak rozwijać matematyczne myślenie u małych dzieci? Colin Rose i Gordon Dryden zaproponowali:

1. Tworzenie matematycznych historyjek;
2. Wymyślanie i zadawanie matematycznych zagadek, związanych z opowiedzianą wcześniej bajeczką;
3. Poszukiwanie „matematycznych" słów w tekstach piosenek, przyśpiewek (możemy również szukać ich w wierszach, opowiadaniach, bajkach i legendach);
4. Zamieńmy się w detektywów, poszukujących matematycznych zdarzeń lub osób, w czytanych książkach;
5. Treść bajki możemy przedstawiać na konkretnych przedmiotach. Jeśli dziecko ma problemy, możemy stworzyć atmosferę tajemniczości z wykorzystaniem jego ulubionej zabawki (Rose, Dryden, 2009).

Należy do tej wyliczanki dołożyć, jeszcze jedną wskazówkę: „Grajmy w gry logiczne (np. tangram, backgammon), strategiczne (np. szachy, tantrix), oparte na zabawie w handel wymienny (np. Superfarmer). Podczas takich zabaw dziecko rozwija swoje zdolności matematyczne. Podczas takich zabaw dziecko rozwija swoje zdolności matematyczne poprzez intensywną stymulację mózgu.

Pamiętajmy!

Zdolności matematyczne zależą przede wszystkim od plastyczności mózgu i możliwości wytwarzania połączeń między neuronami, a nie od jego budowy (ludzie mają zasadniczo podobną budowę mózgu, ale różnią się zdolnościami!)" (Rose, Dryden, 2009, s. 10).

Dlaczego gry? Ponieważ w trakcie gier można:

– uczyć dzieci panowania nad sobą, także w sytuacjach, kiedy nie wszystko przebiega po myśli dziecka;
– kształtować umiejętności interpersonalne dzieci, ważne dla zgodnego współdziałania w grupie;
– rozwijać dziecięcą pamięć, mowę i myślenie;
– doskonalić umiejętności matematyczne (Gruszczyk-Kolczyńska i in. 1996, s. 28).

Gry najczęściej sprawiają dziecku przyjemność, gdyż umożliwiają bycie w ruchu, wykonywanie gestów i mimiki, werbalne porozumiewanie się. Stwarzają możliwości używania naturalnego języka matematyki.

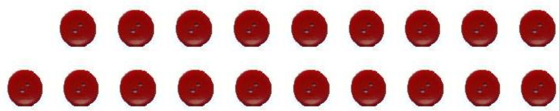
Przykład
Gra: Chodniczek liczbowy
Rekwizyty

- pasek papieru długości około 30 cm, podzielony na kilkanaście pól
- przybory do pisania (lub gotowe cyferki)
- drobne przedmioty, np. klocki, guziki, fasolki itp. – około 30 sztuk

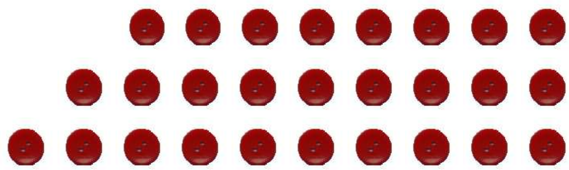
Przebieg zajęć

1. Dziecko układa przed sobą kilka drobnych przedmiotów w jednym rzędzie i w pewnej odległości.

2. Potem dokłada do każdego położonego przedmiotu po jednym – z wyjątkiem pierwszego z lewej strony.



3. Znowu dokłada po jednym przedmiocie do każdej gromadki z lewej strony rzędu.



4. Dziecko powtarza dokładanie przedmiotów, opuszczając za każdym razem kolejną gromadkę z lewej strony rzędu, aż dojdzie do końca – ostatnim ruchem będzie położenie przedmiotu w pierwszej gromadce z prawej strony rzędu. Dziecko głośno przelicza przedmioty w każdej gromadce.
5. Układamy przygotowany wcześniej pasek papieru wzdłuż gromadek przedmiotów. Dziecko głośno licząc przedmioty w każdej gromadce, wpisuje liczby w odpowiednie pola paska. Dzieci które nie potrafią jeszcze pisać cyfr, mogą rysować w polu chodniczka tyle kropek (lub innych znaków), ile jest przedmiotów w każdej gromadce. Mogą kłaść gotowe szablony z cyframi.

1	2	3											

6. Jeżeli zadanie to nie było zbyt trudne, dziecko wypełnia pozostałe pola paska „z pamięci". W ten sposób powstaje chodniczek liczbowy, z którego będzie można korzystać w wielu zabawach (Pisarski 1992).

„Chodniczek liczbowy" jest doskonałą zabawą wspomagającą przyswojenie przez dzieci pojęcia liczby oraz zasad porządkowania liczb. Pasek papieru możemy zastąpić centymetrem krawieckim, osią liczbową, linijką, dobierając odpowiedniej wielkości przedmioty do manipulacji np. ziarna fasoli, nakrętki od śrubek. Celem tej gry jest uposażenie dziecka w umiejętność wstawienia liczby we właściwe miejsce w szeregu liczbowym, ze wskazaniem liczb ją poprzedzających i następnych. Ustawienie przedmiotów w szereg ułatwia koncentrację i utrzymanie rytmu wskazywania. „Człowiek funkcjonuje według własnego rytmu i na dodatek żyje w świecie wypełnionym rytmami z silnie zaznaczoną stałością następstw. Nic więc dziwnego, że rytmy regulują proces uczenia się człowieka. Umysł rejestruje bowiem to, co się powtarza: im regularniej i częściej, tym lepiej. Może także uchwycić coś, co zaistniało tylko raz, ale musi to być silny, nawet szokujący bodziec" (Gruszczyk-Kolczyńska 2004, s. 101).

W programie edukacji matematycznej dla przedszkolaków można wyróżnić obszar tematyczny odnoszący się do rozwiązywania i układania zadań tekstowych, polegających na dalszym doskonaleniu umiejętności rachunkowych dzieci. Tego typu zadania są bardzo ważne, lecz największy odsetek osób ma z nimi problemy. Trudności te narastają z każdym rokiem edukacji, początki zaś sięgają okresu przedszkolnego.

Zadania tekstowe w przedszkolu są najczęściej powiązane z sytuacjami życia codziennego i kończą się pytaniem, na które odpowiedzi można udzielić po przeanalizowaniu informacji zawartych w treści. Dziecko musi wyróżnić dane i niewiadome oraz określić związek pomiędzy nimi.

Przykład

W pokoju zabaw na różowej półce znajdują się zabawki: 4 misie, 5 lalek, 3 samochody, 3 kucyki, 4 kotki, 5 pudełek puzzli. Dzisiaj rano Kasia wzięła dwie lalki i kotka, a Staś jeden samochód. Ile zabawek wzięły dzieci z półki?

Zadanie zwiera wiele danych, spośród których przedszkolak powinien wybrać tylko te niezbędne. Przeszkodą do osiągnięcia zamierzonego celu, jest fakt, iż dzieci w wieku 3-5 lat na ogół nie potrafią czytać ze zrozumieniem. Nic więc dziwnego, iż nie mogą skupić się nad treścią i zapytane nie są w stanie udzielić odpowiedzi. Gdy zapoznają się z pytaniem, wówczas należy powtórzyć, nawet kilka razy, treść je poprzedzającą. Wynikało by z tego, iż istotną rolę w edukacji matematycznej przedszkolaków odgrywa „super" pamięć, jeśli ktoś jej ni ma od samego początku zdany jest na klęskę. Osoby myślące w ten sposób są w błędzie. Przede wszystkim każdy nauczyciel wychowania przedszkolnego, powinien sobie uświadomić, że matematyka elementarna to nie nauka rachowania, lecz kształtowania pojęć matematycznych.

Jak pomóc przedszkolakowi sprostać takiemu wyzwaniu?

Poustawiajmy z dziećmi na półce wymienione przedmioty, a potem zamieńmy ich w aktorów: jedna dziewczynka z grupy niech wcieli się w rolę Kasi i zabierze 2 lalki i kotka, wybrany chłopiec – będzie Stasiem i zdejmie samochód. Po zobrazowaniu tekstu zadania, powtarzamy pytanie, oczekując odpowiedzi, nie koniecznie wypowiedzianej pełnym zdaniem: „Kasia i Stać zdjęli z półki 4 zabawki".

Od najmłodszych lat nauczyciele powinni uczyć, jak radzić sobie, w trakcie poznawania struktury zadania tekstowego oraz jak należy się zachowywać w sytuacji, gdy trzeba je rozwiązać. Potem kiedy pojawiają się skomplikowanych obliczenia, niestety jest już za późno.

Wielu znanych pedagogów podjęło się próby wyszczególnienia kolejnych etapów przy rozwiązywaniu zadań, np.:

I. Wg George Polya
   1. Zrozumienie zadania
   2. Ustalenie planu jego rozwiązania
   3. Realizacja opracowanego planu
   4. Sprawdzenie poprawności rozwiązania (Polya 1964, s. 88).

II. Wg. Wanda Hemmerling
   1. Zapoznanie z zadaniem
      a. Przeczytaj uważnie zadanie
      b. Powiedz krótko, o czym jest zadanie
      c. Powtórz pytanie lub ułóż pytanie, jeśli go brak
   2. Rozwiązanie zadania
      a. Przedstaw warunki zadania za pomocą dostępnych Ci liczebników
      b. Powtórz z pamięci, to co wykonałeś
      c. Przedstaw zadanie krótko, np. rysunek, tabelka, graf
      d. Powiedz co oznacza każda liczba i symbol
      e. Jaki przewidujesz wynik rozwiązania
      f. Napisz rozwiązanie
   3. Sprawdzenie rozwiązania
      a. Sprawdź, czy rozwiązanie odpowiada warunkom zadania (można sprawdzić kilkoma sposobami)
      b. Porównać wyniki rozwiązania z wynikiem przewidywanym
      c. Zapisać krótką odpowiedź (Hemerling 1977, s. 76).

Warto również sięgnąć do pozostałej literatury i przeanalizować propozycje autorów, takich jak: Maria Cackowska, Stefan Turnau.

Doświadczenia i obserwacje dzieci podczas rozwiązywania zadań tekstowych doprowadzają do zasadniczego wniosku, aby w edukacji matematycznej dominowały metody praktyczne, problemowe i aktywizujące. Takie działania ułatwią dzieciom zrozumieć trudny język Królowej Nauk.

Literatura:

1. Bruner J.S. (1974), *W poszukiwaniu teorii nauczania.* PIW, Warszawa
2. Cackowska M. (1990), *Rozwiązywanie zadań tekstowych w klasach I-III.* WSiP, Warszawa
3. Davis P.J., Hersh R. (1994), *Świat matematyki*. PWN, Warszawa
4. Dąbrowski M. (2008), *Pozwól dzieciom myśleć!* CKE, Warszawa
5. Polya G. (1964), *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa
6. Gruszczyk-Kolczyńska E. (2007), *Dziecięca matematyka. Książka dla rodziców i nauczycieli.* WSiP, Warszawa
7. Gruszczyk-Kolczyńska E., Dobosz K., Zielińska E. (1996), *Jak nauczyć dzieci sztuki konstruowania gier?*" WSiP, Warszawa
8. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. (2004), *Wspomaganie rozwoju umysłowego trzylatków i dzieci starszych wolniej rozwijających się.* WSiP, Warszawa
9. Hemmerling W. (1977), *Kierowanie rozwiązywaniem zadań matematycznych w klasach początkowych*. Inst. Kszt. Naucz. i Badań Oświat, Koszalin
10. Klim-Klimaszewska A. (2010), *Pedagogika przedszkolna*. Instytut Wyd. Erica, Warszawa 2010
11. Klus-Stańska D. (2005), *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej.* WSiP, Warszawa
12. Pisarski M. (1992), *Matematyka dla wszystkich dzieci*, Wyd. „ECERI", Warszawa
13. Polański K. (1991), W: St. Urbańczyk (red.), *Encyklopedia języka polskiego*. Wydawnictwo Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław, s. 199
14. Rose C., Dryden G. (2009), *Zabawy fundamentalne 2. Gry i zabawy rozwijające zdolności matematyczne*. Nowak I. (tłum.), Transfer Learning Solutions, Gdańsk
15. Siwek H. (1998), *Czynnościowe nauczanie matematyki*. WSiP, Warszawa
16. Turnau St. (1985), *Metodyka rozwiązywania zadań tekstowych.* W: *Nauczanie Początkowe Matematyki,* t. III, WSiP, Warszawa
17. (1968) *Mały słownik języka polskiego,* St. Skorupka, H. Auderska, Z. Łempicka (red.), PWN, Warszawa 1968
18. (2009) *Encyklopedia,* (red.) Kaczorowski B. (red.), PWN, Warszawa
19. Załącznik nr 1 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 roku w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół (Dz. U. 2009, nr 4, poz. 17)

Strony internetowe:

1. http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka
2. http://www.beautyanalysis.com
3. http://www.wprost.pl/ar/183960/Uroda-przecietnosci/?I=1407

THEORY AND PRACTICE IN TEACHING MATHEMATICS

Social Dissertations No. 1 (V) 2011, p. 119-124

Ewa Jagiełło

University of Natural Studies and Humanities in Siedlce

Summary: In today's world it has become obvious that there is a growing need for studying sciences, among which mathematics, called the Queen of Sciences, plays the dominant part. The main topic of this article is the problem of teaching mathematics at school, especially the teaching methods as well as highlighting the language of mathematics, which is alive and changes dynamically. Reading mathematical texts we come across not only symbols and signs but also words. The exchange of ideas in discourses is facilitated with the use of metaphors and metonymies, often accompanied by gestures and mimics. The language of mathematics with its additional forms of verbal and non-verbal communication seems to be 'gibberish' for many people. This why the communication between teachers and students is difficult. The task of mathematicians as teachers is to pass the knowledge essential in modern life to students is by no means easy. The goal of every teacher is to teach students using this abstract language by choosing appropriate methods and forms of work.
To reach this goal one must do more than solve a number of problems without understanding them. The experience of many teachers shoes that it is more effective to assume the thesis that: one should first understand and picture the problem, make it meaningful, and only then learn the symbol for it..

Key words: teaching, sciences, mathematics, teacher-student communication

What is mathematics? The definition has been shaped over centuries, and according to historians dates back to Egypt and Mesopotamia, then through ancient Greece, Rome and Islamic countries it reached western Europe. As far as eastern countries are concerned mathematical activity started quite intensively in Japan and China.

The term mathematics comes from a Greek word *mathēmatike* from *máthēma* meaning science or skill. It can be found in a number of dictionaries, encyclopaedias and other books dedicated to the world of mathematics.

According to The *Concise Dictionary of Polish* mathematics is „the science of number and spatial relations" (ed. Skorupka, 1968, p. 376). From *The PWN Encyclopedia* entry we learn that: mathematics (from Greek *mathēmatik* from *máthēma* – learning, skill) is one of the oldest branches of human knowledge, in the past perceived as the science of numbers and geometric figures: the most important characteristic of mathematics is that in principle it uses the deductive method. (ed. Kaczorowski, 2009, p. 174)

People of many different branches of science attempted to define mathematics:

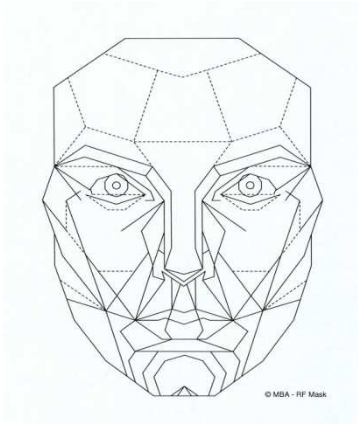
- Paul Adrien Maurice Dirac (English theoretical physicist, 1902-1984) thought that „Mathematics is the tool specially suited for dealing with abstract concepts of any kind and there is no limit to its power in this field" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- Benjamin Peirce (American mathematician, 1809-1880) stated that „mathematics is the science that draws the necessary conclusions" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- Henri Poincaré (French mathematician, physicist, astronomer and the philosopher of science, 1854-1912) -mathematics is the art of giving the same name to different things" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- according to David Hilbert (German mathematician, 1862-1943) - „The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- William Wodsworth (English poet, 1770-1850) poetically stated that: „Mathematics is an independent world created out of pure intelligence" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- Imanuel Kant (German philosopher, 1724-1804) - „mathematics is the most vivid example of the ability of pure mind to broaden its domain without any assistance of experience" (http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka);
- Philip J. Davis and Reuben Hersh - „*mathematics is the science of numbers and space*. To broaden this definition it might be added that mathematics is also concerned with the symbolism relating to numbers and space" (Davis, Hersh, 1994, p 17).
- while for a little child mathematics is mainly numbers, calculations and geometric figures.

Leaving the analysis of poetry and literature aside, let us focus on the school reality, where the most common opinion is that „mathematics is a nightmare". It is problematic for both children and adults. "Very often adult educated people mention in the mass media their problems with mathematics-often behaving as if it was something valuable and ennobling. Is this really pride or a defensive mechanism? And if they are really proud, then of what? By the way another question arises: why has the Japanese puzzle *sudoku* become so popular in our humanists-abundant country? After all, it requires procedures and deductive methods typical of mathematics. Maybe the reason is that we do not associate the puzzle with school? (Dąbrowski, 2008, p. 141). The need to learn mathematics has become obvious in the 21st century resulting in a number of campaigns aimed at fighting the myth of how difficult and useless mathematics is. As a matter of fact humans created this tool for use in everyday life, such as: commercial activity, setting prices, minting coins, taking out/giving loans or gambling (probability theory) Napoleon, who personally liked maths, during wars surrounded himself with an entourage including mathematicians. "Napoleon perceived mathematicians to be useful enough to have them at hand" (Dąbrowski, 2008, p. 87). Looking at mathematics in this context, it becomes clear that it prepares young members of society to create mathematical models that can be useful in many situations in their lives. It is also reasonable to conclude that mathematical preparation is an important element of the development of the society and many branches of science. Mathematics is widely used in banking, economy, architecture and insurance. Mathematical methods support diagnosing and medical treatment. Mathematics is used by psychologists, geographers and a number of naturalists and geneticists. It would be difficult to calculate the instalment of a loan, calculate tax or even build a house or a bridge without mathematical formulas. In the 20th century mathematics played an important role in cosmetics, especially in plastic surgery. When we want to improve our appearance and get rid of defects we take advantage of geometric figures, namely isosceles triangles. It was known since the ancient times that the beauty of human body is the result of the specific proportions of its elements, known as the divine proportion. Each figure whose sides are in the proportion of 1 to 1.6 is perceived as particularly attractive. This is the so-called golden ratio. Thus the secret of our beauty can be found in the Euclidean geometry, more precisely in the golden number.

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$$

Canadian scientists used the golden ratio to construct the ideal mask of characteristic facial features.

Figure 1



Source: http://www.beautyanalysis.com

„According to the specialists from University of Toronto the face of Shania Twain, a Canadian pop singer, is the standard of beauty, as well as the faces of Angelina Jolie and Elizabeth Hurley. The scientists based their statement on mathematical calculations. Using simple mathematics everyone can check if their face is ideal, says prof Kang Lee-the author of the research. Beauty is decided not only on the basis of the symmetrical position of our mouth, eyes, nose or ears, but also...mediocrity" (http://www.wprost.pl/ar/183960/Uroda-przecietnosci/?I=1407).

In my opinion this example proves clearly how useful the knowledge gained on mathematics classes is.

The teacher-student interactions depend greatly on the language that is used for communication and the didactic proceedings used by the teacher during the classes.

At the end of the last century a new movement "Mathematics as a Language" was created by people who believe that the language of traditional schools is too formalized and artificial at all the stages of education. It comprises of a large number of rules, signs and symbols for creating formulas, and it is easy to stumble over them and fall down. This makes it is so difficult for beginners to understand why they are taught things, which cannot be used in everyday life. When a children learn the word spoon, shoe etc. they know the need to use them in real life. They are aware that spoon is needed to eat soup. Why learn the term "vulgar fraction", not only is it problematic, but also it does not appear in real life very often. Will the knowledge of that subject only be preserved in notebooks?

Mathematics, as every live language, consists of many phrases, words, forms and stylistic figures enabling communication. In this vast selection there are words that, when used by mathematicians, gain a new meaning different from common speech, e.g. group, ring, thesis etc. Mathematics has also its jargon used by professionals, which means terminology used in an informal way, e.g. Columbus's egg, exactly one, exists, then and only then etc.

When mathematicians communicate in formal language they use mathematical signs, e.g. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$. In informal communication they use natural language, which also includes figures of speech such as: metaphors, metonymies and idioms..

Metaphor - a figurative use of a word to mean something that resembles in some aspects the things or phenomena that are typically contained by the meaning of the word, e.g *swarm* in relation to people. Metaphor can be described as a shortened simile, as it is always based on some comparison, e.g. the word *ass* used in relation to a person: *This ass has been talking nonsense*. The basis for this use is the simile *He is stupid like an ass*, or shortened *He is an ass*.

The basis for the metaphorical use of a word can be: physical similarities (i.e. similar shape), similarity of behaviour and functioning or similar functions etc. The latter case creates a kind of proportion, e.g. the use of the word neck to describe part of a bottle (that part of a bottle is to the bottle what a neck is to a body).

A popular type of metaphor is using words with specific meanings to describe abstract ideas, e.g. *burn with desire* (Polański, 1991, p 199).The first person to use metaphor Aristotle, who presented it as a type of analogy. It is an indication of similarity relation between a phenomenon, or a statement that: Phenomenon A is to phenomenon B, what phenomenon C is to phenomenon D. In the mathematical understanding it can be interpreted as follows: number 3 is to number 6, what number 4 is to number 8 etc.

The second figure of speech is metonymy. Kazimierz Polański describes metonymy as "figurative use of a word to describe something that is in tangency relation to things or phenomena, which are usually contained within the meaning of the word, e.g. *school* meaning 'all the children attending the given school' (e.g. The school goes to the cinema today.) , *planks* meaning 'skis', *Warsaw* meaning 'the citizens of Warsaw' (e.g. *Today the whole Warsaw celebrates.*). The starting point for using metonymy can be tangency of different kinds : room – the people (working, learning) in the room, material – product made from the material (see above *planks*), author – work (e.g. *I'm reading Mickiewicz at the moment* instead of *I'm reading a work by Mickiewicz*), part – whole" (Polański, 1991, p. 199).

Metonymy is really an ersatz of metaphor, the main difference is that the former is created quickly, spontaneously and with ease, whether the latter requires some consideration and reflection.

The third figure of speech, worth mentioning when discussing language of mathematics, are idioms. How to define the term "idiom" on the level of mathematics? I have tried to find the answer to this question during numerous discourses with Prof. Wacław Rozwadowski. Finally we have decided that "idioms are usually simply traits of such authentic figures. They are such figures which were assimilated and accepted as phrases in a language. One of those petrified figures of style is the sign „=" meaning what is the result". This is petrified metonymy. This sign is present on the keyboard of every calculator and in countless notebooks all over the world. Using letters to represent numbers is similar, e.g.: $a+b$. Although we write letters we think of numbers, thus the sign „+" makes sense, whereas for letters it does not. Shifting the referential function from letters to numbers is crucial."

The above-mentioned figures of speech are of great importance when it comes to constructing mathematical contents by students. It often happens that children discover certain relations or examine some phenomena but are unable to express them precisely. In this situation they replace them with expressions they associate with a given phenomenon-this is metonymy in use. In such case words are accompanied by gestures expressing ideas, which cannot be expressed by words. American scientists have proved in their research that students who employ gestures when solving problems have better understanding of problems and better strategies leading to the solution.

As has been mentioned before, verbal communication abundant in large number of symbols is common in present-day schools. Literature in this field describes conveying knowledge as follows: first definition, then formula, finally sense and practice. This conception, known as mechanistic teaching, emphasises "learning rules and algorithms, practising solving problems even without complete understanding" (Siwek, 1998, p. 10). Many years of practice and observations on my part have resulted in the conclusion that this order of events brings no positive results. Alternative solutions should be suggested: first sense, then practice and finally definitions, theorems and abstract symbols. This is the natural order of events in communication when a child discovers something new. American psychologist Jerome S. Bruner describes:

- ✓ first mode - enactive – connected with movement, gestures and exercises.
  He believes thinking is based on motor activity, which does not involve imagination or words. Children playing with toys make moves and gestures. Internally it is not represented by words, but by activities.
- ✓ second mode – iconic – uses pictures and models.
  Children can present their surroundings by using mental pictures, i.e. through senses: sight, hearing, smell or taste.
- ✓ third mode – symbolic – coding by means of conventional signs and decoding.
  Children become able to representing, processing and manipulating the world by means of language, and slightly later by means of other symbolic systems (numbers, notes, signs).

According to Jerome S. Bruner "it is possible to distinguish three aspects of the process of considering alternative solutions, each connected with managing search processes. In a nutshell they can be described as: activation, sustaining that state and directing the process. In other words considering different options requires something that would trigger this activity, something to ensure continuity, and something to prevent accidental and unsystematic actions." (Bruner, 1974, p. 73).

Summing up the words of the American psychologist in the field of teaching, we might formulate the following thesis: students should first understand and picture the problem, then make it meaningful, ad only then learn the symbol. Whereas in the process of discovering the sense, the task of teachers is to arouse curiosity, provoke mathematical thinking by stimulating correct thinking processes. Dorota Klus-Stasińska and Marzena Nowicka stress that "in the process oriented approach mathematics is understood not as a set of concepts and theorems, but as a way of thinking based on searching for new possibilities and relations between data as well as certain abilities and willingness to use such strategies as: finding similarities, rough operations, discovering properties." (Klus-Stańska, 2005, p. 117).

Those actions should be undertaken since children's early years, so that when they start education at primary school, they are at the highest level of language complexity- symbolic level, which means they can easily go about different types of representations "(...)in mathematical education at kindergarten level children's personal experiences are the most important. They are the building material from which children create definitions and abilities. If those experiences are chosen correctly, they can benefit development of thinking as well as harden them. Everything starts from experiences. It is important for children to speak when processing them, as naming objects and performing activities favour concentration and help children see what is really important. In a way children should feel the sense of what they are doing. Children's utterances are also valuable clues for adults: based on them we can decide if children's reasoning and learning go in the right direction." (Gruszczyk-Kolczyńska, 2007, p. 10).

Children have to know that 7 means seven identical objects, e.g. Seven red buttons, seven blue balls, seven socks, seven squirrels etc. If they do not understand this, they will have problems deciphering the rules of arithmetic.

Not everybody knows that learning the language of mathematics at this lowest level of education is really serious. Most people think that in kindergarten children only play, listen to fairy-tales, paint and count.

According to the new core curriculum for preschool education and kindergartens, achieving these goals requires, among other things, supporting children's intellectual development and mathematical education. „Children graduating kindergarten and starting education at primary school should:

1) be able to count objects and tell the difference between correct and incorrect counting;
2) be able to calculate the result of addition and subtraction with help of finger counting or other substitution sets;
3) be able to establish equinumerability of two sets and use ordinal numbers;
4) be able to distinguish left and right, determine directions and define position of objects in relation to themselves and other objects;
5) understand measurement of length, and know basic methods of measuring it: using steps, or their feet;
6) know common sequences of: day and night, seasons, days of the week and months of the year " (Journal of Laws, dated 2009, No. 4, item 17).

To reach this level of abilities children have to do more than simply count, they have to perform a number of calculations using actual objects (chestnuts, buttons, seeds), estimate quantity, distinguish shapes and sizes, shape their spacial imagination. As mentioned above, kindergarten graduates should be able to count objects, which can be achieved faster and easier if they practice counting objects surrounding them like: plates, toys, spoons, shoes, red cars spotted on their way to kindergarten etc. It is important to draw children's attention to "pairs", e.g. of shoes, gloves, socks and count them as well.

Manipulating objects can be very helpful as it enables children to experience the process in real life. While performing the actions "little humans" observe changes, see the sense and result of them or is able to predict it. This process should last even until the tenth year of life. "Mathematical education in kindergarten is learning quality and quantity relations and shaping mathematical definitions" (Klim-Klimaszewska, 2010, p. 135). Apart from this children have to learn to talk about their experiences and observations. Successes in mathematics at higher levels of educations depend greatly on the level of abilities gained in kindergarten.

Many educators believe that mathematical abilities do not depend on the number of solved problems, as mathematical thinking is based on: specification, generalization, creating hypothesis and justification (ed. Mason, 2005).

How to develop little children's mathematical thinking? Colin Rose and Gordon Dryden suggest:

1. Creating mathematical stories;
2. Creating mathematical puzzles connected with stories told beforehand;
3. Searching for "mathematical" words in songs (we can also search for them in poems, short stories, fairy tales and legends);
4. Let us become private-eyes and search for mathematical incidents and people in the books we read;
5. We can picture the plot using actual objects. If this is problematic for children, we can create atmosphere of mystery by using their favourite toys (Rose, Dryden, 2009).

One more piece of advice should be added to this list: „Play logical games (e.g. tangram, backgammon), strategic games (e.g. chess, tantrix), barter based games (e.g. Superfarmer). Those types of games benefit the development of children's mathematical abilities through intensive stimulation of their brains.

Remember!

Mathematical abilities depend primarily on the elasticity of brain and its ability to create neuronal links, not on its structure (basically people have brains of similar structure, but their abilities are different)" (Rose, Dryden, 2009, p. 10).

Why games? Because playing games we can:

- teach children self-control, also in situations when not everything goes according to their plans;
- shape interpersonal skills, which are crucial for co-operation in a group;
- develop children's memory, speaking and reasoning skills;
- improve mathematical abilities (ed. Gruszczyk-Kolczyńska 1996, p. 28).

Children usually enjoy games because they can move, use gestures and mimics and communicate verbally. Games simply enable the use of natural language of mathematics.

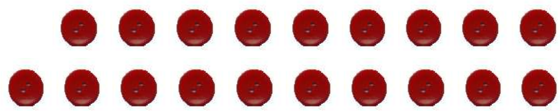
Example
Game: Numerical Runner
Props

- about 30-centimetre-long piece of paper divided into boxes
- writing accessories (or ready-made numbers)
- small objects, e.g. building blocks, buttons, beans. – about 30 pieces

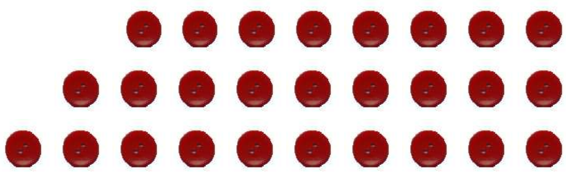
Przebieg zajęć

1. Children place several small objects in front of them in one line

2. Then they add one object to each of the previous ones- except for the first on the left.



3. Again they add one object to each of the ones in second line- except for the first on the left .



4. Children repeat this action until the last move- putting only one object on the right side of the line. Then children count objects in vertical lines out loud.
5. We put the strip of paper under the first horizontal line, children count items in vertical lines out loud and write correct numbers into the proper boxes. If they cannot write numbers yet, they can draw dots (or other symbols)in the boxes to represent the number of objects in particular lines.

1	2	3											

6. If this problem is not too difficult, children can complete the remaining boxes using their memory. In this way they create the Numerical Runner, which can be used in other games in the future. (Pisarski 1992).

„Numerical Runner" is a great game that helps children understand the concept of numbers and the rules for ordering them. Strips of paper can be exchanged with a tape-measure, numerical axis or a ruler providing we use objects for manipulation of appropriate sizes, e.g. beans, screw-caps. The aim of the game is to equip children in the ability to place numbers in the right place of a series as well as identifying the previous and the following number. Placing objects in a series helps concentration and rhythm of identification. „People function according to their own rhythms. In addition they live in a world full of rhythms with clearly marked constancy of consequences. Therefore it comes as no surprise that rhythms regulate our learning process as well. Our minds register repetitions- the more regular and more often, the better. Our minds can register something that happened only once, however, it has to be a very strong, even shocking stimulus" (Gruszczyk-Kolczyńska 2004, p. 101).

Mathematical education curriculum for kindergartens includes a theme area relating to solving and creating word problems meant to further develop children's mathematical abilities. This type of mathematical problems is very important, unfortunately for many people it is the most troublesome. Troubles became bigger with each year of education, and their roots reach the beginnings of kindergarten period.

Word problems in kindergarten are usually connected with everyday life situations and they end with a question, which can be answered based on the analysis of the information provided in the text. Children have to identify data given from data missing and the relation between them.

Example

In a playroom on a pink shelf there are: 4 teddy-bears, 5 dolls, 3 toy-cars, 3 ponies, 4 cats and 5 boxes of jigsaw puzzles. This morning Cathy has taken 2 dolls and a cat from the shelf, while John has taken one car. What is the combined number of toys that Cathy and John have taken from the shelf?

This exercise contains a lot of data, from which children should choose only the necessary pieces. The fact that many children aged 3-5 usually cannot read with understanding can be a serious obstacle. As a result they cannot concentrate on the text or give provide answers to questions. After they have read the question, we should repeat, even several times, the text that precedes it. This would suggest that "super memory" plays a great role in mathematical education of children in kindergarten, and if some children are not blessed with it, they are bound to fail right from the start. People who believe this are mistaken. First of all, every teacher in kindergarten should realize that as far as elementary mathematics is concerned their goal is not teaching calculations, but shaping mathematical concepts.

How to help kindergarten pupils face such a challenge?

Together with children we place the objects mentioned in the text on a shelf, then we ask them to be actors: one girl from the group plays the part of Cathy and takes 2 dolls and a cat from the shelf, one of the boys plays John and takes a car. After this visualisation we repeat the question and expect the answer, not necessarily uttered as a single sentence: „Cathy and John have taken 5 toys".

Children should be taught since early years how to deal with word problems: how to analyse their text, and what to when they have to solve them. When more complicated calculations appear, it is too late.

Many renowned educators have tried to define specific stages of solving mathematical problems, e.g.:

I. According to George Polya
   1. Understanding the problem
   2. Devising a plan
   3. Carrying out the plan
   4. Looking back (Polya 1964, s. 88).

II. According to Wanda Hemmerling
   5. Understanding the problem
      a. Read the problem carefully
      b. Summarise the problem
      c. Repeat the question or create one if it is missing
   6. Solving the problem
      a. Present the conditions of the problem with available numbers
      b. Repeat what you have done in your mind
      c. Summarise the problem, use drawings, charts, graphs
      d. Define the meaning of all the symbols and numbers
      e. What is the predicted result?
      f. Write the result
   7. Examining the solution obtained
      a. Check if the result fulfils the conditions of the problem (can be checked in many ways)
      b. Compare your result with the predicted one
      c. Write a short answer (Hemerling 1977, p. 76).

It is worth reaching for further literature on the subject and read the works of authors such as: Maria Cackowska, Stefan Turnau.

Experience and observations of children solving word problems lead to the basic conclusion that: practical, problematic and activating methods should dominate in mathematical education. Such actions on the part of teachers make understanding the Queen of Sciences easier for children.

References:

1. Bruner J. S. 1974 *W poszukiwaniu teorii nauczani.* Warszawa: PIW
2. Cackowska M. 1990 *Rozwiązywanie zadań tekstowych w klasach I-III.* Warszawa: WSiP
3. Davis P. J., Hersh R. 1994 *Świat matematyki*. Warszawa: PWN
4. Dąbrowski M. 2008 *Pozwól dzieciom myśleć!* Warszawa: CKE
5. Polya G. 1964 *Jak to rozwiązać?* Warszawa: PWN
6. Gruszczyk-Kolczyńska E. 2007 *Dziecięca matematyka. Książka dla rodziców i nauczycieli.* Warszawa: WSiP
7. Gruszczyk-Kolczyńska E., Dobosz K., Zielińska E. 1996 *Jak nauczyć dzieci sztuki konstruowania gier?*" Warszawa: WSiP
8. Gruszczyk-Kolczyńska E., Zielińska E. 2004 *Wspomaganie rozwoju umysłowego trzylatków i dzieci starszych wolniej rozwijających się.* Warszawa: WSiP
9. Hemmerling W. 1977 *Kierowanie rozwiązywaniem zadań matematycznych w klasach początkowych*. Koszalin: Inst. Kszt. Naucz. i Badań Oświat
10. Klim-Klimaszewska A. 2010 *Pedagogika przedszkolna*. Warszawa: Instytut Wyd. Erica
11. Klus-Stańska D. 2005 *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej.* Warszawa: WSiP
12. Pisarski M. 1992 *Matematyka dla wszystkich dzieci.* Warszawa: Wyd. „ECERI"
13. Polański K., W: St. Urbańczyk (ed.) 1991 *Encyklopedia języka polskiego*. Wrocław: Wydawnictwo Zakład Narodowy im. Ossolińskich, p. 199
14. Rose C., Dryden G. 2009 *Zabawy fundamentalne 2. Gry i zabawy rozwijające zdolności matematyczne*. Translated by Nowak. Gdańsk: Transfer Learning Solutions
15. Siwek H. 1998 *Czynnościowe nauczanie matematyki*. Warszawa: WSiP
16. Turnau St. 1985 *Metodyka rozwiązywania zadań tekstowych.* W: *Nauczanie Początkowe Matematyki,* Vol.3. Warszawa: WSiP
17. St. Skorupka, H. Auderska, Z. Łempicka (ed.) 1968 *Mały słownik języka polskiego.* Warszawa: PWN
18. Kaczorowski B. (ed.) 2009 *Encyklopedia* Warszawa: PWN
19. Appendix No.1 to the Regulation by the Minister of National Education on Core-Curricula for Pre-school Education and General Education in particular types of schools (Journal of Law of 2009, No. 4 item 17)

Internet websites:

1. http://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka
2. http://www.beautyanalysis.com
3. http://www.wprost.pl/ar/183960/Uroda-przecietnosci/?I=1407